Théorème Taubérien de la transformation de Laplace complexe Et l'application au théorème des nombres premiers

Lahoucine Elaissaoui

August 24, 2012

Abstract

In this paper I will present a new version proof of a tauberian theorem of a complex Laplace transform and its generalization under some conditions on original function ρ that definate in $\mathbb{R}^+$ to $\mathbb{R}^+$. I recall that the Laplace transform and the Laplace-Stieltjes transform are defined for a complex number $s = \sigma + it$ by:

$$\mathcal{L}_\rho(s) := \int_0^{+\infty} \rho(t)e^{-st}dt \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}^*_\rho(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}d\rho(t)$$

Finally, I will use this result for give a simple proof to the primes number theorem.

Résumé

Dans ce document Je vais présenter une nouvelle version de démonstration du théorème tauberien de la transformation de Laplace complexe et sa généralisation sous quelques conditions sur une fonction ρ définie sur $\mathbb{R}^+$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. Je rappelle que la transformation de Laplace et celle de Laplace-Stieltjes sont définis pour un complexe donné $s = \sigma + it$ par:

$$\mathcal{L}_\rho(s) := \int_0^{+\infty} \rho(t)e^{-st}dt \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}^*_\rho(s) := \int_0^{+\infty} e^{-st}d\rho(t)$$

Finalement, je vais utiliser ce résultat pour donner un preuve simple du théorème des nombres premiers.

1 Introduction

La plupart des articles, dès l'article de Karamata (1929), traitent le théorème taubérien de la transformation de Laplace d'un côté très vaste avec un preuve long et compliqué. Ici, je veux vraiment présenter un preuve simple basé sur la théorie de la mésure et l'intégration usuelle qui donne une application directe dans le domaine de la théorie analytique des nombres, comme le théorème des nombres premiers.

Je rappelle que, pour toute fonction positive f à variation bornée et continue par morceaux sur $[a,b]$ avec $f(a) = 0$ ($a < b \in \mathbb{R}$), il existe une unique mésure de Borel positive μ_f telle que:

$$f(x) = \mu_f(]a,x]) \qquad \forall x \in [a,b]$$

La démonstration découle en [1].

D'une autre, puisque l'application $t \mapsto e^{-st}$ pour tout $s \in \mathbb{C}$ est continue et ρ à variation bornée sur $[0,b]$ ($b > 0$), alors l'intégrale:

$$\int_0^b e^{-st} d\rho(t) \qquad \forall b \geq 0, \forall s \in C$$

est absolument convergente, et si on prend $s = \sigma + it$ avec $\sigma > 0$, la limite $b \to +\infty$ existe, ce que nous assure l'existence de la transformation de Laplace-Stieltej sur le demi-plan complexe $\{\sigma > 0\}$.

Si on suppose en plus que ρ est bornée, continue par morceaux et $\rho(0) = 0$ on aura les résultats suivants:

2 Lemme et Théorème

Lemme 2.1

Soit ρ une fonction positive, bornée, locallement à variation bornée et continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ avec $\rho(0) = 0$ alors $\mathcal{L}_\rho^*$ est continue en 0^+ et en plus:

$$\mathcal{L}_\rho^*(0) = \lim_{x \to +\infty} \rho(x)$$

preuve:

On pose pour tout $s = \sigma + it$ tel que $\sigma > 0$: $\phi_s(t) = e^{-st}$. Alors on a:

- Les fonctions $(\phi_s)_{\sigma > 0}$ sont continues pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$\lim_{s \to 0^+} \phi_s(t) = 1$$

- Pour tout $\sigma > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:

$$|e^{-st}| \leq 1$$

Et puisque:

$$\int_0^{+\infty} d\rho(t) = \mu_\rho([0,+\infty)) < +\infty$$

(car ρ est bornée, d'où $\mu_\rho([0,u]) \leq \|\rho\|_\infty \ \forall u \geq 0$).

Alors d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue on a:

$$\lim_{s \to 0^+} \mathcal{L}_\rho^*(s) := \mathcal{L}_\rho^*(0)$$

Et en plus:

$$\mathcal{L}_\rho^*(0) = \int_0^{+\infty} d\rho(t) = \lim_{x\to+\infty}\int_0^x d\rho(t) = \lim_{x\to+\infty}\mu_\rho(]0,x]) = \lim_{x\to+\infty}\rho(x)$$

■

Remarque 2.1

Pour $s \in \mathbb{C}$ avec $\sigma > 0$ il existe un $r > 0$ et $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tels que $s = re^{it}$, d'où

$$\lim_{s\to 0^+} F(s) = \lim_{r\to 0} F(re^{it}) \qquad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

Avec F une fonction complexe définie sur le demi-plan $\{\sigma > 0\}$.

Théorème 2.1

Soit ρ une fonction positive, bornée, à variation bornée et continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ avec $\rho(0) = 0$, on suppose que $\mathcal{L}_\rho$ (sa transformée de Laplace) est holomorphe sur $\{\sigma > 0\}$ et se prolonge méromorphement sur $\{\sigma \geq 0\}$ avec un pôle simple en 0. Alors:

$$\lim_{x\to+\infty}\rho(x) = Res(\mathcal{L}_\rho, 0)$$

Preuve:

Soit l'intégrale pour tout $\sigma > 0$:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d\rho(t)$$

Alors par une sommation par partie on a:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d\rho(t) = \left[\rho(t)e^{-st}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \rho(t) d(e^{-st})$$

Et puisque

$$|\rho(t)e^{-st}| \leq \|\rho\|_\infty e^{-\sigma t} \qquad \forall\sigma > 0 et \forall t \geq 0$$

et

$$d(e^{-st}) = -se^{-st}dt$$

alors:

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} d\rho(t) = s\int_0^{+\infty} \rho(t)e^{-st}dt \qquad \forall\sigma > 0$$

Ce qui est:

$$\mathcal{L}_\rho^*(s) = s\mathcal{L}_\rho(s)$$

Passons à la limite $s \to 0^+$, et grâce au lemme on a:

$$\mathcal{L}_\rho^*(0) = Res(\mathcal{L}_\rho, 0)$$

Ce qui est:

$$\lim_{x\to+\infty}\rho(x) = Res(L_\rho, 0)$$

■

3 Généralisation du théorème 1.1

LEMME 3.1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et ρ une fonction positive et locallement à variation bornée alors la fonction f définie par

$$f(x) = \rho(x)e^{-\alpha x}$$

Est locallement à variation bornée.

PREUVE:

Pour $\alpha = 0$ évident! Supposons alors que $\alpha > 0$:

Soient $T > 0$,$n \in \mathbb{N}^*$ et $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = T$ une subdivision de $[0, T]$, on note pour S l'ensemble des subdivisions de $[0, T]$, donc on a:

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} |\rho(x_{i+1})e^{-\alpha x_{i+1}} - \rho(x_i)e^{-\alpha x_i}| \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\alpha x_{i+1}}|\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)e^{-\alpha(x_i - x_{i+1})}| \\
&\leq \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} |\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)|
\end{aligned}$$

D'où:

$$\sup_S \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \sup_S \sum_{k=0}^{n-1} |\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)|$$

Et puisque ρ est locallement à variation bornée alors:

$$\sup_S \sum_{k=0}^{n-1} |\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)| < +\infty$$

Et par suite:

$$\sup_S \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| < +\infty$$

Ce que veut dire que f est aussi locallement à variation bornée.

∎

LEMME 3.2

Si ρ est une fonction croissante positive alors est locallement à variation bornée.

PREUVE:

Soit $T > 0$, et soit $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = T$ une subdivision de $[0, T]$ et on note S l'ensemble de toutes les subdivisions de $[0, T]$, alors:

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)| = \sum_{k=0}^{n-1} (\rho(x_{i+1}) - \rho(x_i)) = \rho(T) - \rho(0)$$

Qui est bien finie pour toute subdivision donnée de $[0, T]$, ce qu'il fallait démontrer.

∎

THÉORÈME 3.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+$, soit ρ une fonction positive, continue par morceaux et locallement à variation bornée sur $\mathbb{R}^+$ avec $\rho(0) = 0$ et $\rho(x) \underset{x \to +\infty}{=} O(e^{\alpha x})$. Soit $\mathcal{L}_\rho$ sa transformée de Laplace holomorphe sur $\{\sigma > \alpha\}$ et qui se prolonge méromorphement sur $\{\sigma \geq \alpha\}$ avec $s = \alpha$ leur unique pôle simple. Alors:

$$\rho(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} Res(\mathcal{L}_\rho, \alpha)e^{\alpha x}$$

PREUVE:

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:

$$g(x) = \rho(x)e^{-\alpha x}$$

Donc:

- g est positive sur $\mathbb{R}^+$.
- g est continue par morceaux.
- g est locallement à variation bornée d'après le lemme 2.1.
- $g(0) = 0$.
- g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. En effet:

$$\rho(x) = O(e^{\alpha x}) \Rightarrow \rho(x)e^{-\alpha x} = O(1) \Rightarrow g(x) = O(1)$$

Alors g vérifie toutes les hypothèses du théorème 1.1.
D'une autre part, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\sigma > \alpha$, on a:

$$\mathcal{L}_\rho(s) := \int_0^{+\infty} \rho(t)e^{-st}dt = \int_0^{+\infty} \rho(t)e^{-\alpha t}e^{-(s-\alpha)t}dt = \int_0^{+\infty} g(t)e^{-(s-\alpha)t}dt$$

Donc:

$$\mathcal{L}_\rho(s) = \mathcal{L}_g(s - \alpha) \qquad \forall \sigma > \alpha$$

Alors, posons $z = s - \alpha$ on aura:

$$\mathcal{L}_\rho(z + \alpha) = \mathcal{L}_g(z) \qquad \forall \Re(z) > 0$$

Ce qui montre que $\mathcal{L}_g$ est holomorphe sur $\{\Re(z) > 0\}$ et se prolonge méromorphement sur $\{\Re(z) \geq 0\}$ avec le pôle simple $z = 0$. Le théorème 1.1 implique que:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = Res(\mathcal{L}_g(z), 0) = Res(\mathcal{L}_\rho(s), \alpha)$$

D'où:

$$\rho(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} Res(\mathcal{L}_\rho, \alpha)e^{\alpha x}$$

■

4 Application au théorème des nombres premiers

Dans tout ce qui suit $s = \sigma + it$ avec $\sigma, t \in \mathbb{R}$ et $i^2 = -1$. p un nombre premier positif et k un entier strictement positif donné.

4.1 Introduction

Soient ζ, et ψ les fonctions de Riemann et de Chebyshev (respectivement) définies par:

$$\zeta(s) := \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s} \quad \forall \sigma > 1 \qquad \text{et} \qquad \psi(x) := \sum_{p^k \leq x} \log(p) \quad \forall x \geq 1$$

Je rappelle que:

- La fonction ζ se prolonge analytiquement sur le demi-plan complexe $\{\sigma > 0\}$ avec un pôle simple en $s = 1$, et que ψ peut s'écrire sous la forme $\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)$ avec Λ est la fonction de Van Magoldt définie par:

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log(p) & \text{si } p^k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Il existe une relation entre ζ et ψ:

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(t)}{t^{s+1}} dt \qquad \forall \sigma > 0, s \neq 1$$

- $$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \underset{s\to 1}{\sim} \frac{1}{s-1}$$

- **Hadamard** a démontré que:

$$\forall t \in \mathbb{R}^* : \qquad \zeta(1 + it) \neq 0$$

- **Chebyshev** a démontré que:

$$\psi(x) \underset{+\infty}{\sim} x \Longleftrightarrow \pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}$$

  avec $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers positifs inférieur à un réel x donné.

- **Chebyshev** aussi a démontré que:

$$\psi(x) = \underset{+\infty}{=} O(x)$$

4.2 Théorème des nombres premiers

Il s'agit de démontrer que:

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}$$

Donc pour démontrer cela, il suffit de démontrer que:

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Ce que le théorème suivant montre:

THÉORÈME 4.1

$\psi(x) \sim x$ si et seulement si la fonction ζ ne s'annulle pas sur la droite $\sigma = 1$.

PREUVE:

($\Rightarrow$) Soit $\sigma > 1$. Supposons que $\psi(x) \sim x$, alors on a:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 1 \quad x > A \Longrightarrow |\psi(x) - x| < \varepsilon x$$

donc:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}} dx + \frac{1}{s-1}$$

d'où:

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right| = \left| \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x) - x}{x^{s+1}} dx \right| \leq \int_1^{+\infty} \frac{|\psi(x) - x|}{x^{\sigma+1}} dx$$

C'est à dire:

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right| \leq \int_1^{A} \frac{|\psi(x) - x|}{x^{\sigma+1}} dx + \int_A^{+\infty} \frac{|\psi(x) - x|}{x^{\sigma+1}} dx$$

Posons:

$$K_A := \int_1^{A} \frac{|\psi(x) - x|}{x^2} dx$$

qui est bien définie, alors:

$$\left| -\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right| \leq K_A + \frac{\varepsilon A^{1-\sigma}}{\sigma - 1} \leq K_A + \frac{\varepsilon}{\sigma - 1}$$

D'où:

$$\left| -(\sigma - 1)\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} - \frac{\sigma - 1}{s-1} \right| \leq (\sigma - 1)K_A + \varepsilon$$

Supposons qu'il existe un $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $\zeta(1 + i\tau) = 0$ alors on a:

$$\lim_{\sigma \to 1^+} -(\sigma - 1)\frac{\zeta'(\sigma + i\tau)}{(\sigma + i\tau)\zeta(\sigma + i\tau)} - \frac{\sigma - 1}{i\tau} = 0$$

Ce qui est absurde!! car déjà:

$$\lim_{\sigma \to 1^+} -(\sigma - 1)\frac{\zeta'(\sigma + i\tau)}{(\sigma + i\tau)\zeta(\sigma + i\tau)} - \frac{\sigma - 1}{i\tau} = 1$$

Alors pour tout réel t on a:

$$\zeta(1 + it) \neq 0$$

($\Leftarrow$) Supposons que pour tout réel t, $\zeta(1+it) \neq 0$:

Soit $\sigma > 1$. Par un changement de variable $x = e^t$ dans l'intégrale précédante on trouve que:

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \int_1^{+\infty} \frac{\psi(x)}{x^{s+1}} dx = \int_0^{+\infty} \psi(e^t) e^{-st} dt$$

Posons $\rho(t) = \psi(e^t)$, alors on a:

$$-\frac{\zeta'(s)}{s\zeta(s)} = \mathcal{L}_\rho(s)$$

D'une part, la fonction $\frac{\zeta'}{\zeta}$ est holomorphe sur $\{\sigma > 1\}$ et se prolonge méromorphement sur $\{\sigma > 0\}$ donc en particulier sur $\{\sigma \geq 1\}$ avec un pôle simple en 1 de résidu égale à 1, Ce qui entraine que les conditions sur $\mathcal{L}_\rho$ du théorème 2.1 sont vérifiées (dans ce cas $\alpha = 1$).

D'une autre part, la fonction ψ est croissante, positive et continues par morceaux, de même pour la fonction exponentielle. D'où la fonction ρ est aussi croissante (ce qui implique que ρ est locallement à variation bornée d'après le lemme 2.2), positive et continue par morceaux . Et puisque $\psi(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(x)$ alors $\rho(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(e^t)$ ce qui termine les conditions du théorème sur ρ.

Alors par l'application directe, on déduite que:

$$\rho(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} e^t$$

C'est à dire:

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

■

Alors puisque **Hadamard** a déjà démontré que $\zeta(1+it) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^*$ alors on a toujours:

$$\psi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Ce qui montre qu'on aura aussi toujours:

$$\pi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x}{\log(x)}$$

D'où la démonstration du théorème des nombres premiers.

References

[1] Walter Rudin, *Analyse réelle et complexe*, Troisième tirage MASSON Paris New York Barcelone Milan 1980.

[2] K. Chandrasekharan, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 148*,

[3] Jean Lavoine, *Sur des théorèmes abéliens et taubériens de la transformation de Laplace.*
http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AIHPA/AIHPA_1966__4_1/AIHPA_1966__4_1_49_0/AIHPA_1966__4_1_49_0.pdf